Tehetség gondozó szeminárium példasor

Konczer József

2014. október 5.

Kivonat

1. Relativitás

Útiterv. Mennyi ideig tartana elutazni galaxisunk közepéig, ha az út feléig g-vel gyorsulunk, majd ugyan ilyen mértékben lassulnánk? (A Nap kb. 27000 fényévnyire van a galaxisunk középpontjától.) Mennyi üzemanyagra van szükség, ha a hajtóművünk fény sebességgel löki ki az energiát magából? (A hajótest tömege legyen $M = 100$ tonna.)

Suhanó pálca. Egy nyugalomban L hosszúságú pálcát figyelünk, mely hossz irányba halad v sebességgel. A pálca megfigyelésére egy lyukkamerát használunk, mely a haladási iránytól D távolságra található. Mit látunk ennek a kamerának az ernyőjén?

Sebesség mérés csíkokkal. Világítsunk lézerrel csőben áramló vízbe. Mekkora fázis eltolódást tapasztalunk ahhoz képest mintha a víz nyugalomban lenne? (A cső hossza legyen $L = 2$ m, a víz sebessége $v = 1$ m/s, a lézerünk pedig standard zöld legyen.)

Az óraszállító. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy Földünk nem forog, és a következőt tesszük: veszünk két összeszinkronizált atomórát, az egyiket egy tipikus légi járattal körbe reptetjük a bolygó körül, majd egymás mellé rakva a madár látta és a helyben hagyott órát megnézzük melyik mennyi időt mutat.

Melyik mutat többet, és mennyivel?

Vörösödő követek. Egy intelligens hangyatársadalom él egy pöttyös labdán, mely $R(t) = R_0 e^{Ht}$ módon exponenciálisan tágul. Egy kolónia két követet küld $\Delta t \ll 1/H$ időkülönbséggel egy másikhoz, mely $t = 0$-ban ℓ távolságra van a labda felszínén. Mekkora időkülönbséggel érkeznek meg a követek?

2. Konvergencia sugarak

Példák. Tekintsük a következő négy végtelen sort:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} z^k$$

Milyen függvényeket határoznak meg ezek a sorok, és milyen tartományon? Mi történik ha komplex számokat írunk z helyébe?

Higgs fejreállva. Mozogjon egy m tömegű kis test az alábbi $V(x)$ potenciállal rendelkező térben:

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 + \frac{1}{4!} m\lambda x^4$$

Ha λ paraméter kicsi, akkor a kis test egy harmonikus potenciálban mozog (a visszatérítő erő arányos a kimozdulással), ahol a periódusidő köztudottan független a kitéréstől.

Legyen most λ véges, és vizsgáljuk hogyan függ a periódusidő a kis test energiájától. Tegyük fel hogy egy barátunk megmondta nekünk a $T(E)$ függvény hatványsorba fejtett alakját kis energiák körül:

$$T(E) = \frac{2\pi}{\omega_0}\Big(1 - \frac{3}{16}\alpha + \frac{105}{1024}\alpha^2 - \frac{1155}{16384}\alpha^3 + \frac{225225}{4194304}\alpha^4 - \frac{2909907}{67108864}\alpha^5 + \frac{156165009}{4294967296}\alpha^6 - \frac{2151252675}{68719476736}\alpha^7 + \frac{1933976154825}{70368744177664}\alpha^8 - \frac{27577067392875}{1125899906842624}\alpha^9 + \dots\Big)$$

Ahol

$$\alpha = \frac{2}{3}\frac{\lambda E}{m\omega_0^4}$$

Ennek nagyon megörülünk, viszont később észrevesszük hogy ez a kifejezés nagy energiákra elromlik (konkréten nem is konvergál).

Vajon milyen energiánál romlik el a sorfejtés, és miért?

(Az energia itt mindig pozitív lesz, λ viszont lehet negatív is ekkor is igaz a formula?)